# La modellizzazione matematica della realtà

un percorso di elaborazione applicativa dei contenuti didattici della matematica

INCONTRO I 05/06/2020

# Quale terminologia?

Intendiamo per modello quella rappresentazione matematica, fisica o linguistica che si offre della struttura di un fenomeno complesso al fine di comprenderlo, descriverlo e prevederne meglio gli effetti.

Si distingue un uso *quotidiano* del termine che è associato al lavorare una sostanza plasmabile da un uso *specialistico* legato all'ambito scientifico e tecnico.

Lo scopo della creazione di modello quindi è quello di una sintesi, di una riduzione della realtà in un contesto più semplice ma sufficientemente rappresentativo.

**Capirla**

**Raccontarla**

**Anticiparla**

**Riprodurla**

**Simularla**

**Sintetizzarla**

# Una definizione

Un modello è una **rappresentazione astratta** della realtà che include solo gli aspetti rilevanti allo scopo dello studio della stessa.

Un modello è definito ad un determinato livello di astrazione. La realtà viene descritta con un certo livello di dettaglio, includendo nella rappresentazione solo quelle componenti e interazioni fra **componenti che si ritengono necessarie** allo scopo prefisso.

Alla definizione del modello segue la sua parametrizzazione, per poter considerare le alternative di studio, e la sua valutazione o soluzione per ottenere le informazioni relative allo **studio della realtà**.

Lo scopo della creazione di modello quindi è quello di una sintesi, di una riduzione della realtà in un contesto più semplice ma sufficientemente rappresentativo per poterlo gestire.

**Capirla**

**Raccontarla**

**Anticiparla**

**Riprodurla**

**Simularla**

**Sintetizzarla**

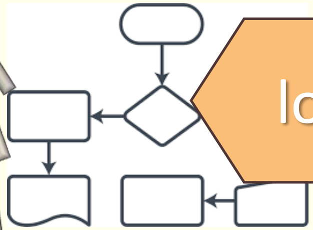
# Tipologie di modelli

La classificazione usuale dei modelli prevede l'individuazione di 5 categorie. I modelli matematici, grafici e logici vengono identificati come astratti mentre i modelli iconici e analogici come fisici.

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

matematici

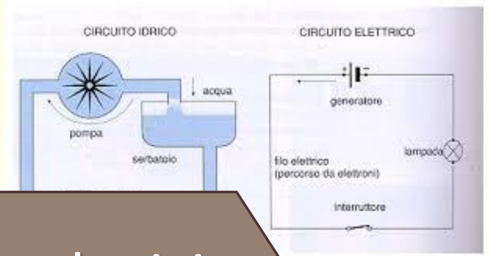
grafici



logici

Dal sistema al modello: quale scelta interpretativa

iconici



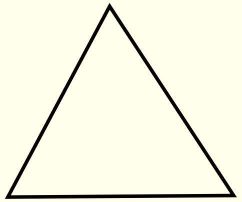

analogici

# I modelli matematici

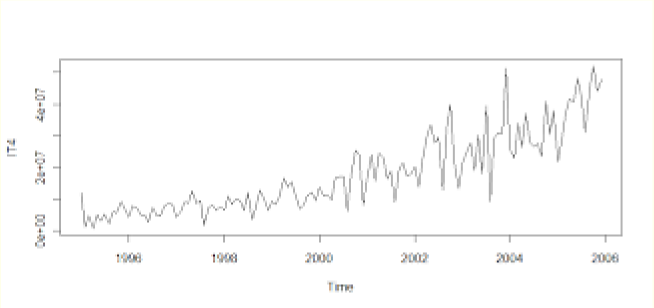
Sono quelli espressi da una funzione.

A seconda della semplificazione effettuata e dal condizionamento delle variabili in gioco si distinguono in

**Deterministici**: la semplificazione è stata minima e il sistema rappresentato è chiudo ovvero le variabili in gioco non sono influenzate da fattori esterni



**Stocastici**: i sistemi rappresentati sono più complessi e richiedono una semplificazione maggiore, inoltre le variabili in gioco risentono di elementi esterni al sistema stesso.



# Modelli deterministici

Le realtà che possono essere approcciate con questo tipo di modelli sono quelle della geometria e della fisica.

In generale potremmo dire che questi modelli possono descrivere tutte quelle realtà che non hanno relazioni con agenti esterni e non prevedono variabilità di risultati a parità di condizioni iniziali.

Rappresentano un primo passo della modellizzazione in particolare se viene data particolare attenzione a questi aspetti:

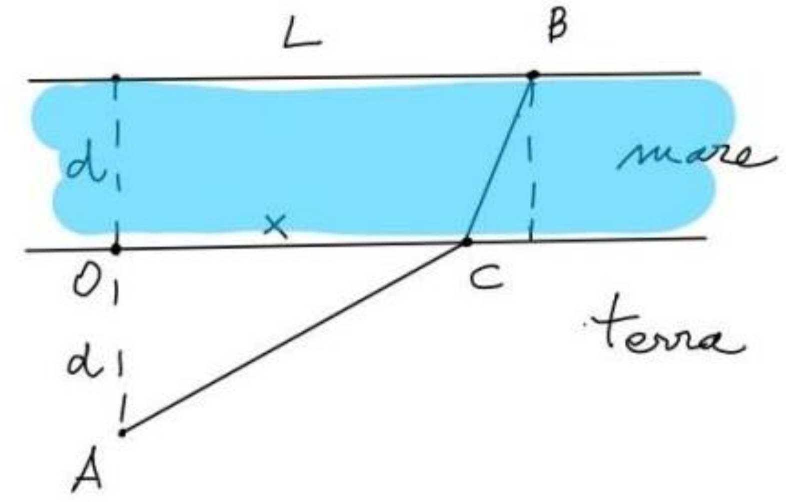
Dominio

Condizioni agli estremi

Massimi e minimi

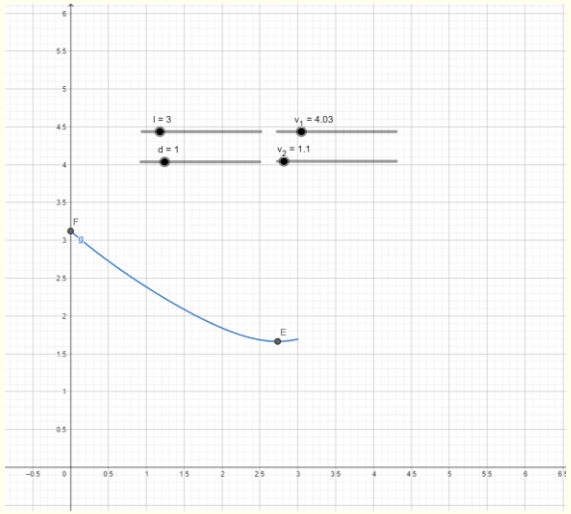
Fanno parte integrante dei programmi di tutti le tipologie di scuole quando si affrontano i problemi di massimo e minimo.

# Un esempio un po' più complesso




Considera il seguente problema di minimo.
Una persona, partendo dalla città A, situata nell'entroterra, deve raggiungere la città costiera B attraversando un braccio di mare, come illustrato in figura. Le velocità $v_t$, di spostamento sulla terra, e $v_m$, di spostamento in mare, sono diverse. Trova il punto C in modo che il percorso richieda il minor tempo possibile.

$$y = \frac{\sqrt{x^2 + d^2}}{v_t} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + d^2}}{v_m}$$



# Modelli stocastici

Con i modelli stocastici abbandoniamo il contesto deterministico per quello statistico probabilista.

Nel XIX secolo, la scoperta della variabilità naturale, del suo ruolo e della sua genesi rappresenta la chiave metodologica del pensiero scientifico succeduto alla crisi della concezione del mondo deterministica e con l’imporsi - anche nelle “scienze della materia” - di un’immagine statistica della realtà.

Considerare nell’insegnamento questo mutamento porta a ridefinire diversi aspetti didattici.

Primo fra tutti: non esiste la risposta corretta, esiste la risposta opportuna.

Il controesempio è conferma della realtà stessa.

# Un problema di metodo

| | |
|---|---|
| **vantaggi** | **Gnoseologico:** comprendere una realtà e rappresentarla matematicamente, ne aiuta la conoscenza, la comprensione, le caratteristiche.<br>**Gestionale:** quando mancano dati relativi a mancate osservazioni del fenomeno, o quando vogliamo prevedere o proiettare valori futuri.<br>**Simulazioni:** si possono compiere simulazioni definendo particolari ipotesi ad esempio quando vogliamo manipolare e vedere le reazioni |
| **svantaggi** | **Filosofico:** gestire una realtà incerta e variabile, come se fosse un ambiente certo, deterministico, porta inevitabilmente ad una sfasatura dannosa della percezione della realtà. Occorre quindi sempre valutare attentamente la variabilità perduta nell’azione del modellare e decidere se il modello possa effettivamente servire oppure se i danni che provoca sono significativamente più pericolosi dei vantaggi che porta. |

# La variabilità nella realtà

Nella costruzione di un modello si tende a semplificare la realtà, a sintetizzarla. In questa operazione ciò che viene «sacrificata» è la componente di variabilità del fenomeno

Si dovrà quindi porre attenzione ad una distanza modello-realtà la quale potrebbe avere natura ENDOGENA se interna al fenomeno, cioè sua caratteristica, parte integrante della realizzazione stessa del fenomeno.

Potrebbe altresì essere di natura ESOGENA poiché non appartenente direttamente al fenomeno ma legata ad esso da fattori esterni o da aleatorietà.

Saper individuare le due tipologie di distanze è fondamentale per la comprensione del fenomeno.

# Come procedere nella creazione di un modello

In modo molto semplificato la definizione di un modello avviene attraverso questi momenti

Osservazione dei dati reali e formulazione degli obiettivi → Scelta del modello (della famiglia di funzioni) → Ricerca dei parametri più opportuni → Validazione prova del modello

# Due momenti importanti

adattamento

## Scelta della tipologia della funzione.

Basandosi sulle caratteristiche grafiche di ogni funzione e ragionando sulle possibili trasformazioni che può subire bisogna scegliere quale sia la più adatta alla rappresentazione della realtà

accostamento

## Individuazione dei parametri opportuni

Una volta scelta la tipologia di funzione è necessario individuare il valore dei parametri che ne disegnano il miglior passaggio tra i punti della nuvola

# Il momento soggettivo: l’adattamento

Per poter individuare il modello puro, matematico, più idoneo a rappresentare una realtà occorre considerare fondamentali due aspetti:

Tutte le indicazioni che ci vengono dallo studio di funzione per la tipologia di funzione osservata e tutte le possibili trasformazioni (traslazioni e dilatazioni in primo luogo) che si possono operare sulla forma canonica

Tutte le indicazioni che ci vengono fornite dalla realtà: valori assunti dalle variabili in gioco, differenziali dei valori, ordine di grandezza, valori estremi assumibili.

È fondamentale quindi il grado di conoscenza del soggetto che compie la scelta sia riguardo il fenomeno che si sta cercando di modellare, sia riguardo alle possibili funzioni da considerare come rappresentative.

# Il momento oggettivo: l’accostamento

Una volta individuata la tipologia di funzione, occorre dare un valore ai parametri che ne gestiscono le trasformazioni in modo tale che quella combinazione di valori garantisca il migliore caso tra tutti i possibili di quel tipo di funzione.

La funzione avrà dei valori ( $\hat{y}_i$ ) che si scosteranno da quelli reali ( $y_i$ ) per il semplice motivo che la realtà risente di elementi perturbatori che la purezza del modello matematico non considera.

L’obiettivo è quello che il totale degli scostamenti sia il minimo possibile.

Per fare ciò esiste un processo matematico definito da Gauss e detto «metodo dei minimi quadrati» che garantisce l’individuazione dei parametri che individuano quella funzione il cui accostamento ai punti reali sia il più vicino possibile.

# Una valutazione della scelta

Individuati la funzione più adatta e i parametri che accostano meglio si può cercare una valutazione della scelta fatta misurando la bontà dell'adattamento del modello alla realtà.

Ce ne sono diversi e tutti pongono l'attenzione sui residui cioè sulle differenze $\hat{y}_i - y_i$ tra valori teorici e valori reali. Il test del chi-quadro risponde a questa richiesta.

Il valore del chi quadro si ottiene da

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(\hat{y}_i - y_i)^2}{\hat{y}_i}$$

È nullo quando c'è perfetta corrispondenza modello realtà e cresce più il modello teorico si allontana dalla distribuzione reale.

In base al numero di osservazioni reali (k) e al numero di parametri definiti della funzione è possibile tramite le tavole della distribuzione del chi-quadro associare un livello di probabilità all'evento: quanto questo modello sia adatto alla rappresentazione della realtà.

# Tipologie di modelli matematici stocastici

Nei modelli matematici rappresentati da una funzione occorre chiarire bene quali sono le variabili in gioco.

1

Analisi di una sola variabile

Questa analisi cerca di associare un modello matematico capace di descrivere le frequenze di un carattere nella popolazione. Particolarmente importante per lo studio delle popolazioni normali.

1+

$y = f(t)$

Analisi di una variabile nel tempo

Questa analisi considera il movimento di un carattere nel tempo. Particolarmente importante per lo studio delle popolazioni ad esempio. Se il carattere ha natura economica questo tipo di studio prende il nome di analisi delle serie storiche ed ha un suo sviluppo metodologico molto importante.

2

$y = f(x)$

Analisi di due variabili

Questo tipo di studio è legato al concetto di dipendenza di due variabili e di come si può spiegare una rispetto al valore dell'altra, in ambiente statistico prende il nome di regressione.

+

$y = f(x_i)$

Analisi di più variabili

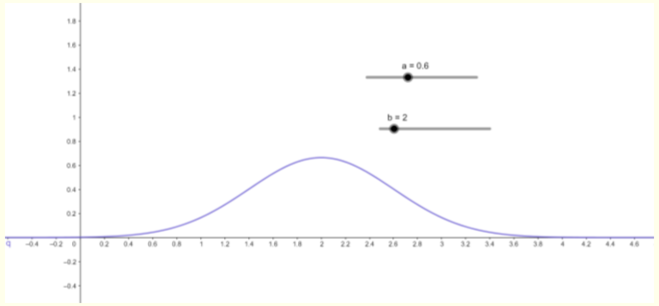
Questi modelli sono molto complicati da gestire e anche da rappresentare oltre al fatto che richiederebbero una introduzione allo studio di funzione in più variabili. Tra i più famosi, in ambito economico, ci sono i modelli che spiegano la produzione con le variabili capitale e lavoro (modelli di Cobb Douglas).

## Modello normale

Rappresenta una distribuzione di frequenze simmetrica rispetto alla media (che rappresenta anche moda e mediana) con bassi valori di frequenza più ci si allontana dalla media

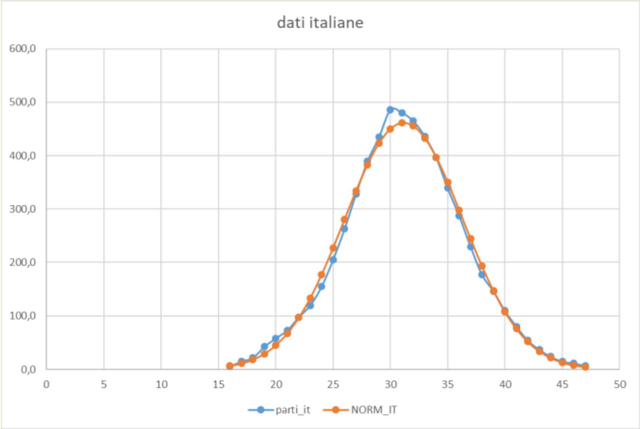
$$y = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-b}{a}\right)^2}$$

Il valore medio (il parametro $b$) rappresenta l'asse di simmetria, mentre il descrittore della variabilità del carattere è il parametro $a$ (maggiore è il suo valore più schiacciata risulta la curva).




Potenza di questo modello è il riferimento teorico alla normale standardizzata che risulta come trasformazione (traslazione e dilatazione) di qualsiasi popolazione normale

I caratteri la cui distribuzione è normale sono numerosissimi. Questo esempio riporta il confronto fra il numero di parti secondo l'età della madre in Italia nel 2018 (linea azzurra) con una normale che presenta stessa media e varianza)

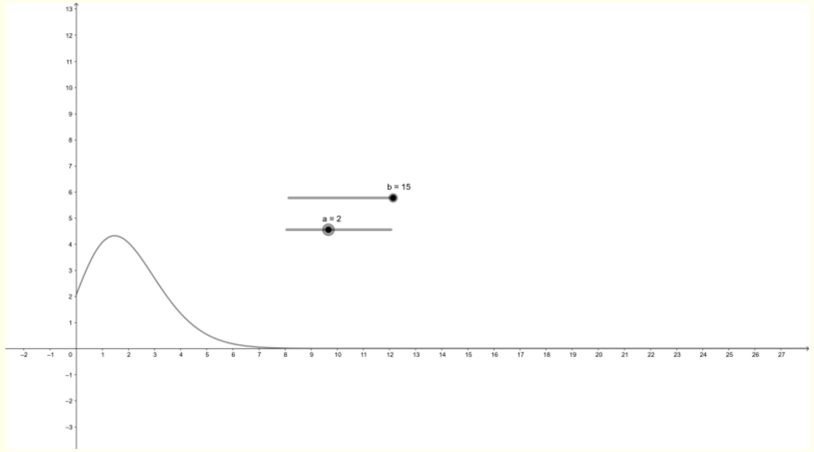


# Modello degli eventi rari (Poisson)

Rappresenta una distribuzione di frequenze particolarmente adatta alla descrizione delle frequenze di eventi rari nel tempo

$$y = b\frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda}$$

Alcuni esempi di applicazione della Poisson: soldati prussiani morti per causa di calcio da mulo; numero di parti quadrigemellari; numero di postini morsi da cani a New York, numero di refusi nelle pagine di un libro.



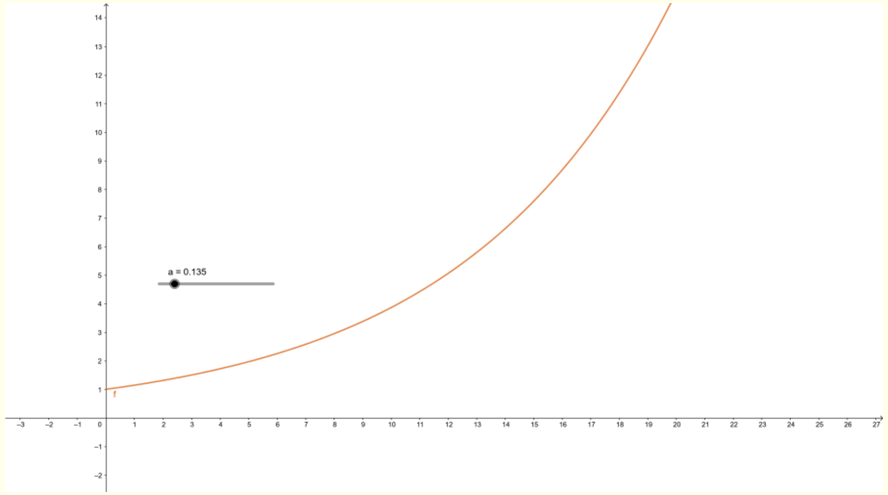

Il parametro lambda rappresenta la media e la varianza della distribuzione mentre b è un dilatatore verticale influenzato dalla numerosità della popolazione (se b=1 si tratta di una distribuzione di frequenze relative)

## Modello malthusiano

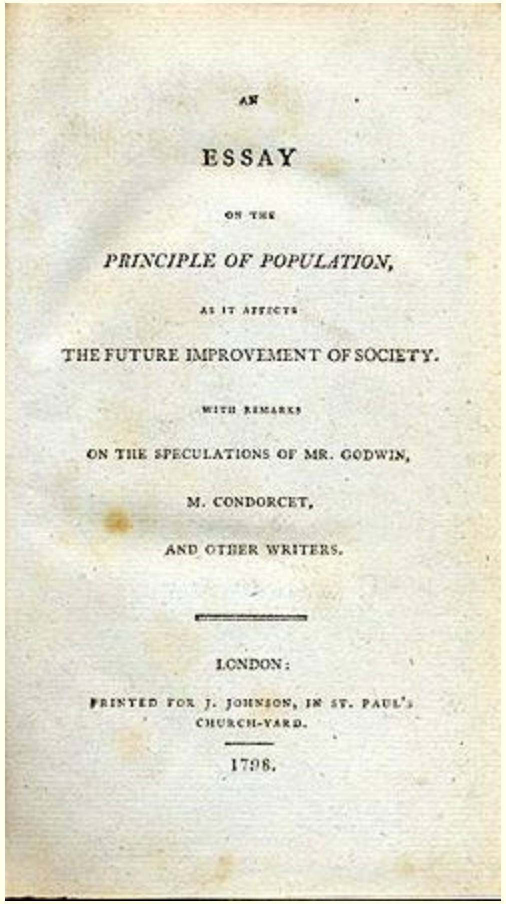
Si tratta di considerare lo sviluppo di una popolazione $P$ che ha un tasso di crescita costante nel tempo ($a$)

$$y = Pe^{at}$$

Malthus affronta il problema dell'aumento della popolazione affiancandolo sia ad una conseguenza economica (se la popolazione aumenta c'è più disponibilità di manodopera quindi un abbassamento dei salari) sia ad una agricola (le risorse alimentari crescono in modo lineare, quindi più lentamente) arrivando alla conclusione che una popolazione che aumenta porta alla povertà.




Questo modello è la base della capitalizzazione composta.



AN

ESSAY

ON THE

*PRINCIPLE OF POPULATION,*

AS IT AFFECTS

THE FUTURE IMPROVEMENT OF SOCIETY.

WITH REMARKS

ON THE SPECULATIONS OF MR. GODWIN,

M. CONDORCET,

AND OTHER WRITERS.

LONDON:

PRINTED FOR J. JOHNSON, IN ST. PAUL'S CHURCH-YARD.

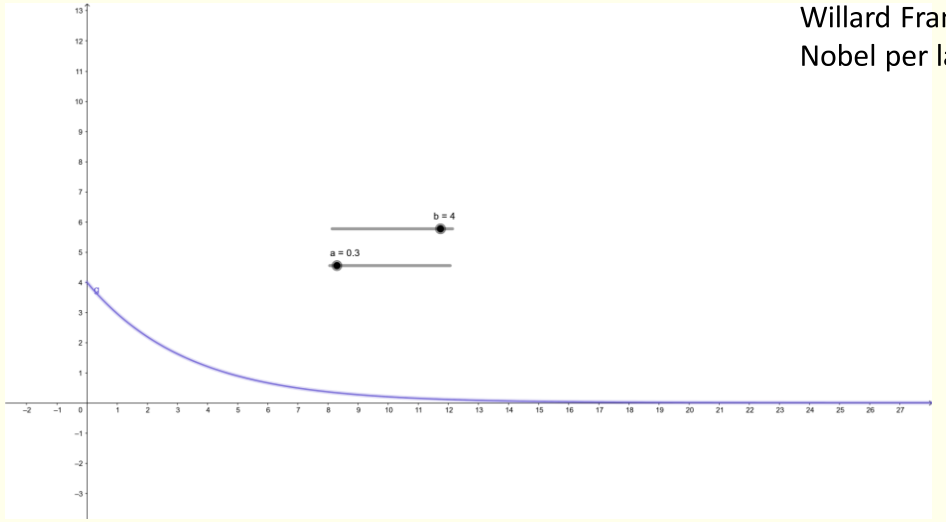
1798.

# Modello del decadimento radioattivo o del valore attuale

Si tratta di considerare la diminuzione di una popolazione che ha un tasso di decrescita costante nel tempo ($a$)

$$y = be^{-at}$$

Willard Frank Libby premio Nobel per la chimica nel 1960

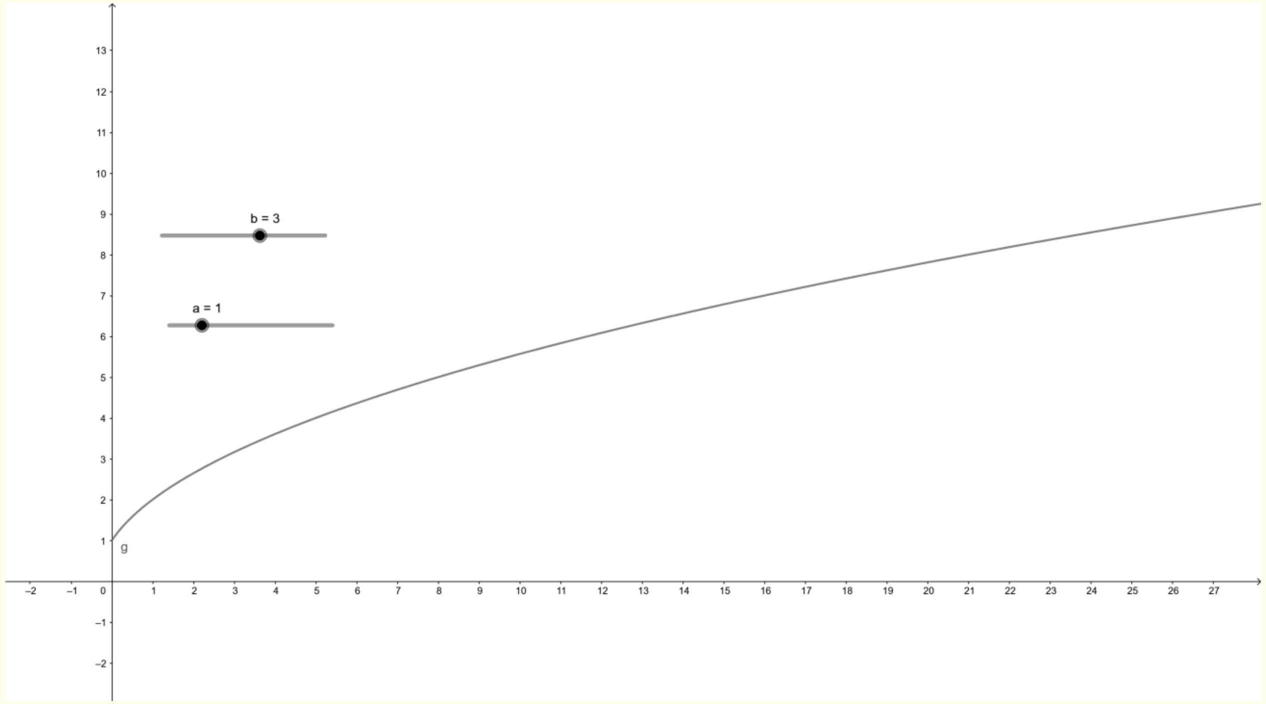



Come applicazione, consideriamo il problema della datazione dei reperti archeologici tramite il carbone radioattivo.
Le cellule degli organismi viventi assorbono dal $CO_2$ carbone, presente in proporzione più o meno costante, con due isotopi, il $^{14}C$, radioattivo, prodotto dai raggi cosmici a causa delle collisioni con l'azoto nell'atmosfera, e il $^{12}C$, stabile.
Quando l'organismo muore, cessa l'assorbimento di $CO_2$ e i nuclei di $^{14}C$ decadono in atomi di azoto emettendo particelle β. La sua quantità dimezza ogni 5.730 anni circa.

# Modello a potenza frazionaria

Si tratta di considerare lo sviluppo di una popolazione che ha un tasso di crescita variabile nel tempo attraverso il rapporto tra una costante ($b$) e la popolazione stessa

$$y = \sqrt{a + bt}$$




In questo contesto il valore $\sqrt{a}$ rappresenta l’ammontare della popolazione al tempo 0 mentre b è il coefficiente di crescita e agisce direttamente sulla modalità di sviluppo.

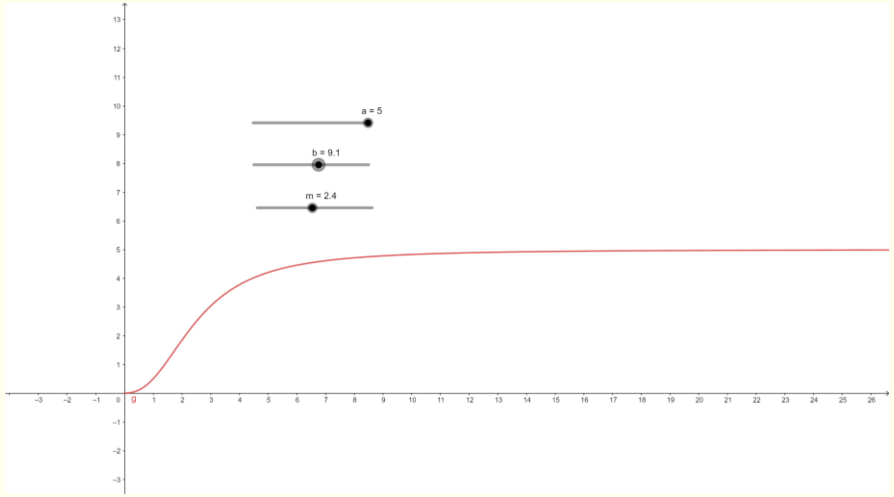
# Modello di Jolicoeur

In questo caso la crescita della popolazione è rappresentata da una funzione razionale.

$$y = \frac{at^m}{t^m + b}$$

Con i parametri positivi la curva è considerata irreversibile. Ha applicazioni in allometria (l'analisi dell'accrescimento relativo di un organo o di una parte di un organismo rispetto a tutto il corpo) relativamente alla crescita dei bambini, e in generale degli animali.

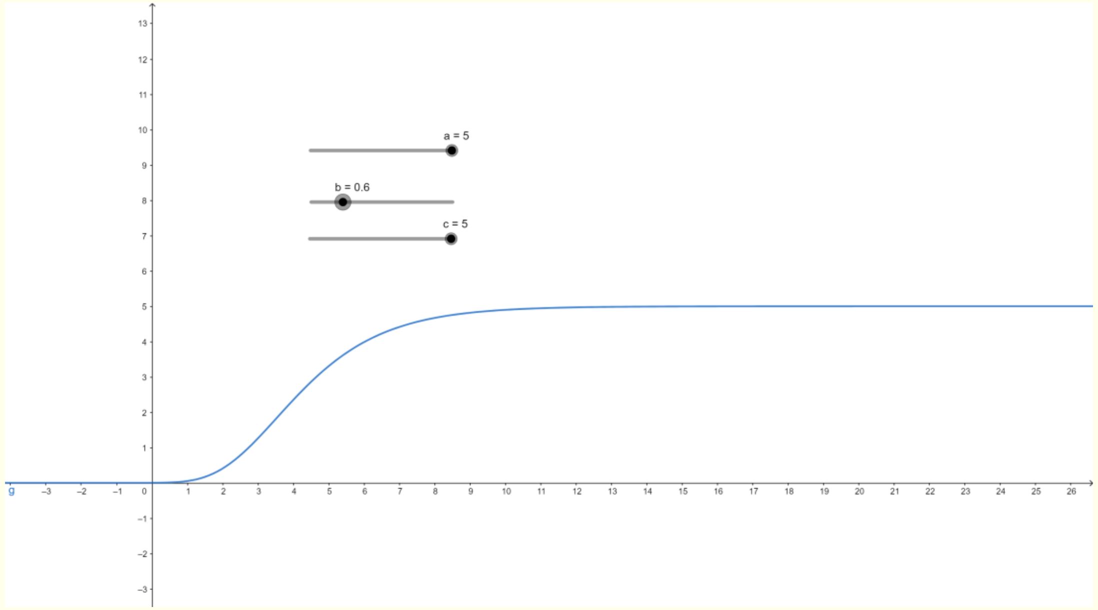
Con m=1 ricordiamo l'esempio del modello dell'apprendimento di una disciplina in base al tempo dedicato allo studio.



# Modello di Gompertz

In questo caso il tasso di crescita diminuisce proporzionalmente al logaritmo del livello raggiunto

$$y = ae^{-\frac{c}{b}e^{-bt}}$$




Il parametro $a$ rappresenta il valore massimo raggiungibile (saturazione); il parametro $b$ invece rappresenta il rallentamento del tasso di crescita; il valore $c$ lo si può vedere come un traslatore orizzontale e mette in relazione il livello iniziale con quello finale.

## Modello curva logistica (caso di Verhust)

In questo caso il tasso di crescita il tasso di riproduzione è proporzionale alla popolazione esistente e all'ammontare di risorse disponibili.

$$y = \frac{a}{1 + be^{-ct}}$$

Il parametro $a$ rappresenta il valore massimo raggiungibile (saturazione); il parametro $b$ invece rappresenta un traslatore orizzontale; il parametro $c$ lo si può intendere come la reattività della popolazione all'aumento.